

1º INFORMÁTICA DE GESTIÓN. PO-07. 1ª SEMANA
Soluciones

PROBLEMA 1.1.1

En la figura P1.1.1 se muestra un circuito con un sistema formado por una batería V_o y tres condensadores $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ y $C_3 = 2C$. Todos los condensadores están formados por placas plano paralelas sin dieléctrico entre ellas.

Calcular la energía electrostática almacenada en los tres condensadores. En un instante dado, sin desconectar la batería, se introduce en el condensador C_1 un dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 3\varepsilon_o$. Calcular de nuevo la energía electrostática almacenada en los tres condensadores. El sistema de condensadores, ¿suministra o recibe energía cuando se introduce el dieléctrico?

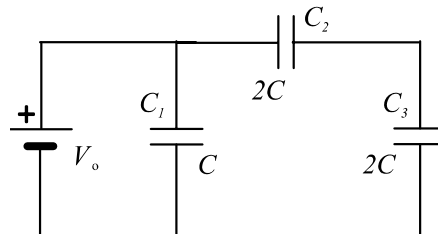


Figura P1.1.1

Solución

En primer lugar determinamos la capacidad equivalente del circuito: Los condensadores 2 y 3 están en serie y a su vez en paralelo con el condensador 1. Por tanto:

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

Sustituyendo valores:

$$C_{23} = C$$

Y la capacidad equivalente total:

$$C_T = C_1 + C_{23} = 2C$$

La energía electrostática almacenada es

$$W_e = \frac{1}{2}C_TV^2 = \frac{1}{2}2CV_o^2 = CV_o^2$$

Al introducir el dieléctrico sin desconectar la batería, el voltaje se mantiene constante. La capacidad del condensador 1 se triplica por lo que la nueva capacidad equivalente total del circuito es

$$C'_T = C'_1 + C_{23} = 3C + C = 4C$$

Y la energía electrostática almacenada es

$$W'_e = \frac{1}{2}C_TV^2 = \frac{1}{2}4CV_o^2 = 2CV_o^2$$

Puesto que la energía almacenada ha aumentado, el sistema de condensadores recibe energía del generador cuando se introduce el dieléctrico.

PROBLEMA 1.1.2

La figura P1.1.2 representa un sistema de conductores formado por un tramo circular de radio a y tres tramos rectilíneos, los dos paralelos al eje Y e indefinidos en la dirección del eje Y. Por todos los tramos circula una corriente I . Calcular el campo magnético creado en el punto P ($a, 0, 0$).

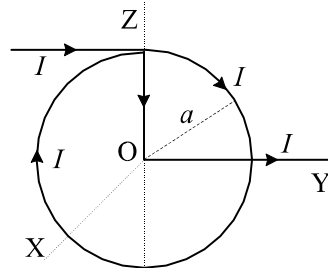


Figura P1.1.2

Solución

El campo magnético en el punto $P(a, 0, 0)$ se obtiene como suma de las siguientes contribuciones:

1. Campo debido a una espira en el eje de la misma a una distancia a del centro. Según la expresión [6.14] del libro de texto básico, el campo producido en el eje Z por una espira de radio R situada en el plano XY es:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o}{2} \frac{IR^2}{[z^2 + R^2]^{3/2}} \mathbf{u}_z$$

Adaptando esta expresión a nuestro problema, $R = a$, $z = a$ y la dirección del campo será $-\mathbf{u}_x$, lo cual se deduce aplicando la regla de la mano derecha. El campo \mathbf{B}_1 será:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_o I}{4a\sqrt{2}} \mathbf{u}_x$$

2. Campo debido a un hilo semiinfinito paralelo al eje Y y a una distancia $d = a\sqrt{2}$ del punto P

Aplicamos de nuevo la expresión deducida en el libro de texto base para el campo magnético producido por un hilo finito:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \mathbf{u}_\varphi$$

En nuestro caso, $R = d = a\sqrt{2}$ y los ángulos son respectivamente $\alpha_1 = -\pi/2$ y $\alpha_2 = 0$, y la dirección será, observando el dibujo

$$\mathbf{u}_\varphi = -\cos 45^\circ \mathbf{u}_x - \cos 45^\circ \mathbf{u}_z = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)$$

por tanto

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{4\pi a\sqrt{2}} (0 - (-1)) \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z) \right] = -\frac{\mu_o I}{8\pi a} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z)$$

3. Campo debido a un tramo recto sobre el eje Z. Aplicamos de nuevo la expresión anterior, teniendo en cuenta que en este caso $R = a$ y los ángulos son respectivamente $\alpha_1 = -\pi/4$ y $\alpha_2 = 0$, y la dirección será, $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_x$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \left[0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] [-\mathbf{u}_x] = -\frac{\mu_o I \sqrt{2}}{8\pi a} \mathbf{u}_x$$

4. Campo debido a un tramo semiinfinito sobre el eje Y que comienza en $y = a$. Aplicamos de nuevo la expresión anterior, teniendo en cuenta que en este caso $R = a$ y los ángulos son respectivamente $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = \pi/2$, y la dirección será, $\mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_z$

$$\mathbf{B}_4 = \frac{\mu_o I}{4\pi a} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) (-\mathbf{u}_z) = -\frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_z$$

El campo total será la suma de las contribuciones de los distintos tramos:

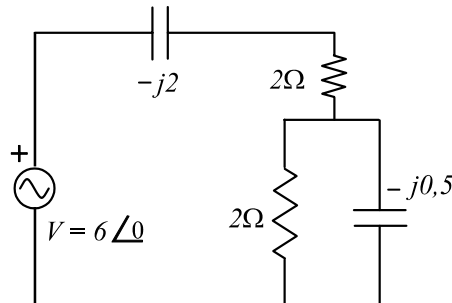
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o I}{4a\sqrt{2}} \mathbf{u}_x - \frac{\mu_o I}{8\pi a} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z) - \frac{\mu_o I \sqrt{2}}{8\pi a} \mathbf{u}_x - \frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o I}{8\pi a} \left([\pi\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}] \mathbf{u}_x + 3\mathbf{u}_z \right)$$

PROBLEMA 1.1.3

En la figura P1.1.3 se muestra un circuito de corriente alterna (c. a.), con un generador $V_o = 6 \angle 0^\circ$. Calcular la corriente que suministra el generador.



FiguraP1.1.3

Solución

La corriente que suministra el generador vendrá dado por

$$I = \frac{V}{Z}$$

siendo Z la impedancia total del circuito. Para calcularla determinamos la impedancia del paralelo de resistencia y condensador:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{-0,5j} = \frac{-0,5j + 2}{-j}$$

luego

$$Z_1 = \frac{-j}{2 - 0,5j}$$

racionalizando

$$Z_1 = \frac{-j}{(2 - 0,5j)(2 + 0,5j)} = \frac{0,5 - j2}{4,25}$$

La impedancia total se obtiene sumando a la anterior el resto de los elementos en serie

$$Z_T = Z_1 + 2 - j2$$

$$Z_T = \frac{0,5 - j2}{4,25} + 2 - j2 = \frac{0,5 - j2 + 8,5 - j8,5}{4,25} = \frac{9 - j10,5}{4,25}$$

Y la intensidad será

$$I = \frac{6}{\frac{9-j11,5}{4,25}} = \frac{25,5}{9 - j10,5}$$

Racionalizando de nuevo

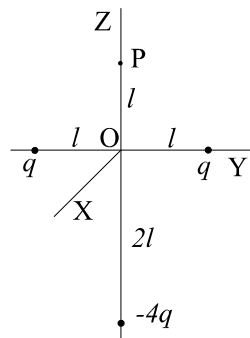
$$I = \frac{25,5}{(9 - j10,5)(9 + j10,5)} = \frac{229,5 + j267,75}{191,25} = 1,2 + j1,4$$

$$I = 1,2 + j1,4 = 1,84 \angle 49,4^\circ$$

1º INFORMÁTICA DE GESTIÓN. PO-07. 2ª SEMANA
Soluciones

PROBLEMA 1.2.1

La figura P1.2.1 muestra un sistema de cargas eléctricas, $q_1 = q$, $q_2 = q$ y $q_3 = -4q$, dispuestas en los puntos indicados en la citada figura. Calcular el campo y potencial electrostático en el origen de coordenadas O y en el punto P (0, 0, l). Calcular el trabajo realizado para trasladar una carga Q desde el punto O al P.



FiguraP1.2.1

Solución

Se trata de un problema sencillo de cargas puntuales. Aplicamos el principio de superposición y, para cada carga, las fórmulas 2.6 y 2.22 del texto base. Por tanto,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} \quad V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_i q_i \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$$

Las posiciones de las cargas las definimos mediante,

$$\mathbf{r}'_1 = -l \mathbf{u}_y \quad \mathbf{r}'_2 = l \mathbf{u}_y \quad \mathbf{r}'_3 = -2l \mathbf{u}_z$$

y además sus valores son:

$$q_1 = q_2 = q \quad q_3 = -4q$$

a) Punto O

Para este punto tenemos que $\mathbf{r} = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1 &= l \mathbf{u}_y & \mathbf{r} - \mathbf{r}'_2 &= -l \mathbf{u}_y & \mathbf{r} - \mathbf{r}'_3 &= 2l \mathbf{u}_z \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| &= l & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| &= l & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3| &= 2l\end{aligned}$$

Aplicando las fórmulas:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_O &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{l^3} (l \mathbf{u}_y) + \frac{q}{l^3} (-l \mathbf{u}_y) + \frac{-4q}{(2l)^3} (2l \mathbf{u}_y) \right) \\ \mathbf{E}_O &= \frac{q}{4\pi\epsilon_o l^2} (\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_y - \mathbf{u}_z) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_o l^2} \mathbf{u}_z \\ V_O &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{l} + \frac{q}{l} + \frac{-4q}{2l} \right) = 0\end{aligned}$$

b) Punto P

Para este punto tenemos $\mathbf{r} = l \mathbf{u}_z$, por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1 &= l \mathbf{u}_z + l \mathbf{u}_y & \mathbf{r} - \mathbf{r}'_2 &= l \mathbf{u}_z - l \mathbf{u}_y & \mathbf{r} - \mathbf{r}'_3 &= 3l \mathbf{u}_z \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| &= \sqrt{2}l & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2| &= \sqrt{2}l & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_3| &= 3l\end{aligned}$$

Calculamos el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{(\sqrt{2}l)^3} (l \mathbf{u}_z + l \mathbf{u}_y) + \frac{q}{(\sqrt{2}l)^3} (l \mathbf{u}_z - l \mathbf{u}_y) + \frac{-4q}{(3l)^3} (3l \mathbf{u}_z) \right)$$

las componentes \mathbf{u}_y se anulan y sólo queda la componente \mathbf{u}_z :

$$\mathbf{E}_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_o l^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{9} \right) \mathbf{u}_z = \frac{q}{\pi\epsilon_o l^2} \left(\frac{9\sqrt{2} - 8}{72} \right) \mathbf{u}_z$$

Calculamos el potencial:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q}{\sqrt{2}l} + \frac{q}{\sqrt{2}l} + \frac{-4q}{3l} \right) = \frac{q}{\pi\epsilon_o l} \left(\frac{3\sqrt{2} - 4}{12} \right)$$

c) Trabajo O-P

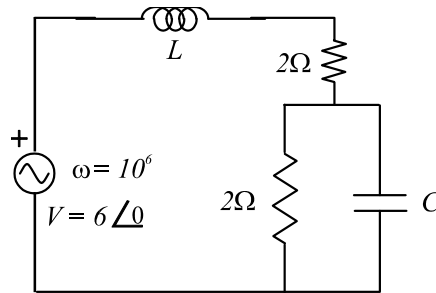
El trabajo de mover una carga Q desde el punto O al punto P se expresa como

$$W = Q (V_P - V_O) = \frac{Qq}{\pi\epsilon_o l} \left(\frac{3\sqrt{2} - 4}{12} \right)$$

que es positivo si Q es positiva, por tanto tenemos que invertir energía para desplazar una carga positiva de O a P, mientras que el sistema nos devolverá energía si lo que desplazamos es una carga negativa.

PROBLEMA 1.2.2

En la figura P1.2.2 se muestra un circuito de corriente alterna (c. a.), con un generador $V_o = 6 \angle 0^\circ$. Calcular la corriente que suministra el generador. La frecuencia angular del generador es $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$. $L = 1 \mu\text{H} = 10^{-6} \text{ H}$. $C = 0,5 \mu\text{F} = 0,5 \times 10^{-6} \text{ F}$.



FiguraP1.2.2

Solución

Se trata de resolver un circuito CA. El procedimiento es exactamente el mismo que el de los circuitos de corriente continua, donde las autoinducciones y condensadores representan una impedancia compleja que depende de la frecuencia de esta forma:

$$Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

En nuestro caso sólo hay una autoinducción —de valor $L = 1 \mu\text{H}$ — y un condensador —de valor $C = 0,5 \mu\text{F}$ — y sus impedancias respectivas son, para la frecuencia de nuestro generador, $\omega = 10^6 \text{ s}^{-1}$:

$$Z_L = j \quad Z_C = \frac{1}{j0,5} = \frac{2}{j}$$

Para no tener que resolver 2 mallas, podemos reducir la malla donde el condensador y una resistencia de 2Ω están en paralelo; la resistencia equivalente de esta malla es,

$$Z_{RC} = (R^{-1} + Z_C^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{j}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1+j}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{1+j}$$

multiplicando numerador y denominador por el complejo conjugado del segundo, $1 - j$

$$Z_{RC} = \frac{2(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{2(1-j)}{2} = 1 - j$$

Ahora tenemos una sola malla cuya impedancia total es la suma de las impedancias que quedan en serie:

$$Z_T = Z_L + R + Z_{RC} = j + 2 + (1 - j) = 3 \Omega$$

Por tanto, aplicando la 2ª Ley de Kirchhoff:

$$V = I Z_T, \rightarrow I = \frac{V}{Z_T} = \frac{6}{3} = 2 \text{ A}$$

es decir, la corriente que suministra el generador tiene una amplitud de 2 amperios y está en fase con el voltaje proporcionado por éste.

PROBLEMA 1.2.3

Tenemos tres barras de semiconductor dispuestas como muestra la figura P1.2.3. La superficie transversal de los extremos unidos a los puntos A y B se cubren con una capa de buen conductor.

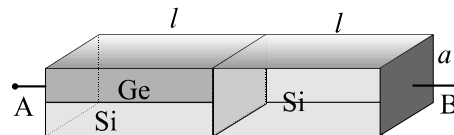
Dispuestas en paralelo, como muestra la figura P1.1.3 dos barras en forma de paralelepípedo, cuyas dimensiones son: longitud $l = 10 \text{ cm}$, anchura $a = 1 \text{ cm}$ y espesor $a/2 = 0,5 \text{ cm}$. Una barra está construida con Ge puro, es decir, sin dopar, y la otra con Si puro. A 300°K , para el Ge $n_i \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $\mu_n \simeq 3900 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$, $\mu_p \simeq 1800 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$, y para el Si $n_i \simeq 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, $\mu_n \simeq 1500 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$, $\mu_p \simeq 475 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$.

En serie con las dos barras anteriores se dispone una barra de silicio puro, cuyas dimensiones son: $l = 10 \text{ cm}$; y la sección es cuadrada de lado $a = 1 \text{ cm}$.

La carga del electrón es $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Calcular la resistencia que se mediría entre los puntos A y B.

Si se calienta la barra de Ge, ¿aumenta o disminuye la resistencia entre AB?. Razonar la respuesta.



FiguraP1.2.3

Solución

Primero calculamos las conductividades del Ge y Si intrínsecos. Puesto que no están dopados, sabemos que la densidad de electrones y huecos es la misma, e igual a la densidad intrínseca de portadores, n_i :

$$n = p = n_i$$

Aplicamos la fórmula 12.4 del libro base, primero para el germanio:

$$\gamma_{Ge} = en_i (\mu_n + \mu_p) = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 2 \times 10^{13} \cdot (3900 + 1800) = 1,824 \times 10^{-2} (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$$

Para el silicio:

$$\gamma_{Si} = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 1,45 \times 10^{10} \cdot (1500 + 475) = 4,58 \times 10^{-6} (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$$

Ahora calculamos las resistencias de cada bloque aplicando la fórmula:

$$R = \frac{l}{\gamma S}$$

donde l es la longitud del bloque y S el área de la sección implicada. Atención: es importante darse cuenta de las unidades en las que hemos calculado las conductividades; en este caso, hemos optado por mantener todo en centímetros, por lo que las dimensiones hemos de darlas también en centímetros.

Para el bloque de germanio $l = 10 \text{ cm}$, $S = 0,5 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 0,5 \text{ cm}^2$:

$$R_{Ge} = \frac{10}{(1,824 \times 10^{-2}) \cdot 0,5} = 1096 \Omega$$

Para el bloque de silicio en paralelo con el de germanio las dimensiones son las mismas que el anterior:

$$R_{Si,1} = \frac{10}{(4,58 \times 10^{-6}) \cdot 0,5} = 4,36 \times 10^6 \Omega$$

Estos dos bloques presentan una resistencia equivalente a su combinación en paralelo:

$$R' = (R_{Ge}^{-1} + R_{Si,1}^{-1})^{-1} \simeq 1095 \Omega$$

Para el otro bloque de silicio, su área de sección es ahora $S = 1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

$$R_{Si,2} = \frac{10}{(4,58 \times 10^{-6}) \cdot 1} = 2,18 \times 10^6 \Omega$$

La resistencia total entre A y B es la suma de esta resistencia y la anteriormente calculada del bloque de germanio y silicio en conjunto:

$$R = R' + R_{Si,2} \simeq R_{Si,2} \simeq 2,18 \times 10^6 \Omega$$

Es decir, prácticamente la resistencia está dada sólo por la del segundo bloque de silicio.

Si calentamos el germanio aumenta el número de portadores disponibles, por tanto aumenta la conductividad y disminuye la resistencia del bloque de germanio; consecuentemente, disminuye la resistencia del conjunto. Pero como hemos visto que la resistencia del bloque de germanio apenas tiene relevancia, esta disminución es prácticamente inapreciable.